Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - BTS Groupement D1

Session 2022 • Code sujet : **22-MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Analyses de biologie médicale : 1 ; Bio analyses et contrôles : 2 ; Biotechnologies : 1 ; Europlastics et composites : 1,5 ; Bioqualité : 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical (13 questions) **Page 3**

2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsera.fr/assets/annales/bts-era/E2 - Mathématiques/2022/BTS ERA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical

Dans un pays de 60 millions d'habitants, des données annuelles de 2013 à 2021 servent à étudier le nombre de personnes équipées d'un implant médical. Deux modèles sont étudiés indépendamment : un ajustement exponentiel à partir de données transformées et une fonction définie à l'aide d'une équation différentielle.

Partie A

Question 1. Compléter le tableau fourni en annexe avec les valeurs de y = ln(N - 30), arrondies au millième.

Pour chaque année, on retranche 30 au nombre N, exprimé en milliers, puis on calcule le logarithme népérien du résultat. Par exemple, pour 2013 : ln(56,25 − 30) ≈ 3,268. En répétant ce calcul avec les neuf valeurs du tableau, puis en arrondissant au millième, on obtient les résultats suivants. Les rangs k vont de 0 pour 2013 à 8 pour 2021.

Rang k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y = ln(N − 30)	3,268	3,336	3,418	3,497	3,578	3,656	3,738	3,818	3,898

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour k = 0 à 8, les valeurs de y, arrondies au millième, sont : 3,268 ; 3,336 ; 3,418 ; 3,497 ; 3,578 ; 3,656 ; 3,738 ; 3,818 ; 3,898.

Question 2.a. À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $M_i(k_i ; y_i)$, sous la forme y = ak + b, en arrondissant a et b au centième.

On ajuste les neuf points (k ; y) par une droite, en utilisant les rangs de 0 à 8 et les valeurs transformées de la question précédente. La régression linéaire des données donne une pente d'environ 0,0794 et une ordonnée à l'origine d'environ 3,2606. Il faut arrondir séparément ces deux coefficients au centième, comme le demande l'énoncé, avant d'écrire l'équation ajustée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La droite d'ajustement des moindres carrés, avec les coefficients arrondis au centième, est : y = 0,08k + 3,26.

Question 2.b. À partir de l'équation de la droite d'ajustement, déduire que le nombre de personnes équipées, exprimé en milliers et en fonction du rang k, peut être modélisé par N(k) = 30 + 26,05e^(0,08k).

La transformation utilisée est y = ln(N − 30). En remplaçant y par son expression sur la droite ajustée, on obtient ln(N − 30) = 0,08k + 3,26. L'exponentiation donne $N - 30 = e^{3,26}e^{0,08k}$. Comme $e^{3,26} \approx 26,05$, le modèle demandé en milliers de personnes s'en déduit directement.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le modèle obtenu est $N(k) = 30 + 26{,}05e^{0{,}08k}$, où N est exprimé en milliers de personnes.

Question 3.a. En supposant que le modèle proposé reste valide, estimer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026.

Le rang correspondant à 2026 est $k = 2026 - 2013 = 13$. On évalue alors le modèle de la partie A : $N(13) = 30 + 26{,}05e^{0{,}08 \times 13} \approx 103{,}70$. Cette valeur est en milliers de personnes. L'arrondi au millier de personnes consiste donc à arrondir le nombre de milliers à l'unité la plus proche.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Selon le modèle de la partie A, environ 104 000 personnes seront équipées de l'implant en 2026.

Question 3.b. Si le nombre d'habitants du pays reste stable sur le long terme, déterminer si le modèle étudié reste valide et justifier la réponse.

Dans ce modèle, le coefficient de k dans l'exponentielle est positif. Ainsi, lorsque k tend vers $+\infty$, $e^{0{,}08k}$ tend vers $+\infty$ et $N(k)$ devient lui aussi arbitrairement grand. Or le pays compte 60 millions d'habitants, soit 60 000 milliers. Le nombre de personnes équipées ne peut pas dépasser cet effectif total : le modèle ne peut donc pas rester valide à long terme.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non. À long terme, le modèle prévoit un effectif qui dépasse la population totale, limitée à 60 millions d'habitants.

Partie B

Question 1.a. Résoudre sur $[0 ; +\infty[$ l'équation différentielle homogène (E_0) : $y' + 0{,}05y = 0$.

L'équation homogène s'écrit $y' = -0{,}05y$. C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, de la forme $y' = ay$ avec $a = -0{,}05$. Ses solutions sont les fonctions exponentielles associées au taux $-0{,}05$, multipliées par une constante réelle. La restriction de l'intervalle à $[0 ; +\infty[$ ne change pas cette forme générale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Sur $[0 ; +\infty[$, les solutions de l'équation homogène sont $y(t) = Ce^{-0{,}05t}$, avec C réel.

Question 1.b. **Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

On cherche une solution constante de l'équation complète en posant y(t) = c, où c est un réel. Sa dérivée est nulle, donc l'équation y′ + 0,05y = 0,05 devient 0,05c = 0,05. En divisant les deux membres par 0,05, on trouve c = 1. Cette fonction constante constitue une solution particulière de l'équation.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution constante de l'équation différentielle complète est y(t) = 1, car sa dérivée est nulle.

Question 1.c. **Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

La solution générale de l'équation complète s'obtient en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène associée. La solution particulière constante est 1, et les solutions homogènes sont de la forme $Ce^{-0,05t}$. La somme de ces deux expressions donne toutes les solutions de l'équation sur l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions de l'équation complète sur [0 ; +∞[sont $y(t) = 1 + Ce^{-0,05t}$, avec C réel.

Question 1.d. **En utilisant la condition g(0) = 8, déduire une expression de la fonction g sur [0 ; +∞[.**

La solution générale trouvée à la question précédente s'écrit $g(t) = 1 + Ce^{-0,05t}$. En prenant t = 0, on obtient g(0) = 1 + C, car $e^0 = 1$. La condition imposée g(0) = 8 donne alors 1 + C = 8, donc C = 7. On remplace cette constante dans l'expression générale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La fonction qui vérifie g(0) = 8 est $g(t) = 1 + 7e^{-0,05t}$, pour tout $t \geq 0$.

Question 2. **Avec le modèle f(t) = 450/(1 + 7e^(-0,05t)), où t est le nombre d'années écoulées depuis 2013, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026.**

Le temps t est compté en années depuis 2013. Pour 2026, t = 2026 − 2013 = 13. En utilisant le modèle de la partie B, $f(13) = 450/(1 + 7e^{-0,05 \times 13}) \approx 96,683$. Le résultat étant exprimé en milliers, on arrondit au millier de personnes le plus proche.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Selon le modèle de la partie B, environ 97 000 personnes seront équipées de l'implant en 2026.

Question 3. **Déterminer la limite de la fonction f en +∞ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

Lorsque t tend vers +∞, l'exponentielle $e^{-0,05t}$ tend vers 0. Le dénominateur $1 + 7e^{-0,05t}$ tend donc vers 1, tandis que le numérateur reste égal à 450. La limite de f est ainsi 450. Puisque f est exprimée en milliers de personnes, cette valeur correspond à l'effectif vers lequel le modèle tend.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La limite de f en +∞ est 450, soit 450 000 personnes équipées selon le modèle.

Question 4. **À partir de l'expression donnée de f'(t), déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.**

L'expression donnée dans le sujet est $f'(t) = 315e^{-0,05t} / [2(1 + 7e^{-0,05t})^2]$. Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive, le numérateur est donc positif et le dénominateur est également positif. Ainsi $f'(t) > 0$ sur l'intervalle. Le modèle prévoit une augmentation continue du nombre de personnes équipées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La fonction f est strictement croissante sur [0 ; +∞[: le nombre de personnes équipées augmente avec le temps.

Question 5. **Déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes équipées de l'implant dépassera 120 000, soit 120 milliers, et expliquer la méthode employée.**

On cherche les années pour lesquelles $f(t) > 120$. Le dénominateur étant positif, cette inégalité équivaut à $e^{-0,05t} < 2,75/7$, puis à $t > \ln(7/2,75)/0,05 \approx 18,69$. Le temps correspondant doit être un nombre entier d'années : le premier rang entier qui convient est 19. On ajoute ce rang à l'année 2013.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le seuil de 120 000 personnes sera dépassé à partir de 2032, correspondant à 19 années après 2013.

2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller

Dans une usine, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d'eau et une file de bouteilles vides. L'exercice étudie les défauts d'approvisionnement, le nombre de jours de panne sur 200 jours et un test statistique portant sur le volume d'eau délivré.

Partie A - Défaut d'approvisionnement

Question 1. Associer chacune des quatre phrases numérotées du tableau de gauche à l'information correspondante du tableau de droite : la probabilité que la file ne se vide pas, l'événement où seule la file se vide, la probabilité que la file et le réservoir se vident, et la probabilité d'un défaut d'approvisionnement. Écrire chaque numéro avec la lettre associée, sans justification.

On associe chaque phrase à l'événement ou à la probabilité correspondante du tableau. La probabilité que la file ne se vide pas vaut le complémentaire de l'événement A. « Seule la file se vide » correspond à A et non B. Les deux événements se réalisent pour A et B. Un défaut d'approvisionnement correspond à A ou B. L'énoncé ne demande aucune justification.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 1-E ; 2-C ; 3-F ; 4-D.

Partie B - Pannes de la machine sur 200 jours

Question 1. La probabilité de panne un jour quelconque est 0,025 et les pannes surviennent indépendamment. Donner, sans justification, la loi de probabilité suivie par X, qui compte le nombre de jours de panne sur une période de 200 jours, et préciser ses paramètres.

Chaque jour constitue une épreuve de Bernoulli : la machine tombe en panne avec une probabilité de 0,025, indépendamment des autres jours. La variable X compte le nombre de jours de panne parmi 200 jours. Elle suit donc une loi binomiale de paramètres le nombre d'épreuves et la probabilité de panne. Il s'agit de la loi exacte avant l'approximation de Poisson introduite à la question suivante.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> X suit la loi binomiale de paramètres 200 et 0,025 : $X \sim \mathcal{B}(200; 0,025)$.

Question 2.a. La loi de X est approchée par une loi de Poisson de paramètre λ. Justifier que λ = 5.

Pour approcher la loi binomiale par une loi de Poisson, on prend pour paramètre le produit du nombre d'épreuves par la probabilité de succès, ici la probabilité de panne. Ainsi, avec 200 jours indépendants et une probabilité de panne de 0,025 par jour, le paramètre vaut $\lambda = np = 200 \times 0,025 = 5$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lambda = 5$.

Question 2.b. **Pour une variable aléatoire Y suivant la loi de Poisson de paramètre 5, donner la valeur de P(Y ≤ 10), arrondie à 10^{-3}.**

Pour une loi de Poisson de paramètre 5, on additionne les probabilités des valeurs entières de 0 à 10 : $P(Y \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} e^{-5}\frac{5^k}{k!}$. La somme vaut environ 0,9863047. L'arrondi au millième demandé est donc 0,986.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(Y \leq 10) \approx 0,986$.

Question 2.c. **Le graphique suggère que P(Y = 15) est égale à 0. À l'aide de la formule de la loi de Poisson donnée dans le sujet, dire si cette conjecture est vraie ou fausse et justifier.**

La formule de la loi de Poisson donne $P(Y = 15) = \frac{5^{15}e^{-5}}{15!}$. Le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs, donc cette probabilité n'est pas nulle. Elle est seulement trop petite pour être visible à l'échelle du graphique. Sa valeur est approximativement 0,000157.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La conjecture est fausse : $P(Y = 15) \approx 0,000157 > 0$.

Partie C - Qualité de l'embouteillement

Question 1. **À partir des mesures sur 100 bouteilles, où les volumes de 73, 74, 75, 76 et 77 cL sont observés respectivement 17, 20, 43, 13 et 7 fois, déterminer à la calculatrice la moyenne x̄ et l'écart type σ de l'échantillon. Arrondir l'écart type à 10^{-2}.**

La moyenne pondérée des mesures est $\bar{x} = \frac{73\times17+74\times20+75\times43+76\times13+77\times7}{100} = 74,73$ cL. En calculant l'écart type de la série à partir des 100 mesures, on obtient $\sigma = \sqrt{1,2171} \approx 1,1032$ cL, soit 1,10 cL après arrondi au centième.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\bar{x} = 74,73$ cL ; $\sigma \approx 1,10$ cL.

Question 2.a. **Pour le test bilatéral H₀ : μ = 75 contre H₁ : μ ≠ 75, sous H₀ la moyenne Z suit une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11. Déterminer un réel h tel que P(75 - h ≤ Z ≤ 75 + h) ≈ 0,95, à 10^{-2} près.**

Sous l'hypothèse H_0, la moyenne Z suit une loi normale de moyenne 75 et d'écart type 0,11. L'intervalle central contenant 95 % des valeurs est délimité par les quantiles $-1,96$ et $1,96$ de la loi normale centrée réduite. Ainsi, $h = 1,96 \times 0,11 = 0,2156$ cL, soit 0,22 cL au centième.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h \approx 0,22$ cL.

Question 2.b. **Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de confiance de 95 %.**

Au seuil de confiance de 95 %, la région d'acceptation de H_0 est l'intervalle central calculé en 2.a, centré sur 75 cL. On compare la moyenne observée des 100 bouteilles aux deux bornes de cet intervalle. Si elle appartient à l'intervalle, on ne rejette pas H_0 ; si elle est à l'extérieur, on rejette H_0 au profit de H_1.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Accepter H_0 si $74,78 \leq \bar{x} \leq 75,22$ cL ; sinon, la rejeter.

Question 2.c. **À partir des résultats de l'échantillon donné, déterminer si l'hypothèse H₀ : μ = 75 peut être acceptée.**

La moyenne de l'échantillon est 74,73 cL. La règle de décision donne comme borne inférieure de la région d'acceptation $75 - 0,22 = 74,78$ cL. Or $74,73 < 74,78$: la moyenne observée n'appartient pas à l'intervalle d'acceptation. Au seuil de 5 %, on rejette donc l'hypothèse selon laquelle la moyenne vaut 75 cL.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> On rejette $H_0 : \mu = 75$ au seuil de 5 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS Groupement D1, session 2022, code 22-MATGRD1, durée de deux heures et coefficient variable selon la spécialité. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, étudient la modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical, puis les probabilités, les pannes d'une embouteilleuse et le contrôle statistique du volume d'eau distribué.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- La transformation y = ln(N - 30) permet de linéariser le modèle exponentiel et d'effectuer un ajustement affine par les moindres carrés.
- Pour y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution particulière constante et de la solution générale de l'équation homogène.
- Le nombre de pannes sur n jours indépendants suit une loi binomiale B(n,p) ; son approximation de Poisson utilise λ = np.
- Dans un test bilatéral normal à 95 %, on compare la moyenne observée à l'intervalle central centré sur la moyenne sous H_0.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : les nombres de personnes équipées dans les deux modèles sont exprimés en milliers.
- Pour une limite ou un sens de variation, interpréter explicitement le résultat dans le contexte de l'implant médical.
- Dans le défaut d'approvisionnement, distinguer les événements et leurs probabilités et exploiter leur indépendance.
- Pour le test, utiliser l'écart type 0,11 indiqué sous H_0 et appliquer la règle de décision à la moyenne observée.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment passer de l'ajustement affine au modèle exponentiel ?

À partir de y = ak + b et de y = ln(N - 30), on obtient N - 30 = e^(ak+b). On réécrit alors N(k) = 30 + e^b e^(ak), ce qui donne le modèle exponentiel demandé.

Q : Pourquoi le nombre de jours de panne peut-il être approché par une loi de Poisson ?

Le nombre de pannes suit d'abord une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,025. L'approximation indiquée dans le sujet utilise le paramètre λ = np, soit 5.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Les deux exercices sont indépendants et valent chacun 10 points. Répartissez le temps entre eux, en réservant une marge pour vérifier les calculs, les arrondis et les réponses contextualisées.

Q : Quels éléments faut-il présenter pour conclure le test statistique ?

Utilisez l'écart type 0,11 sous H_0, déterminez l'intervalle central de probabilité 0,95, puis comparez-y la moyenne de l'échantillon. Formulez une conclusion explicite sur l'hypothèse H_0.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsera.fr/assets/annales/bts-era/E2 - Mathématiques/2022/BTS ERA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Étude et Réalisation d\ : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.