Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage** (12 questions) — **Page 3**

2. **Étude par transformation de Laplace d'un système électrique entrée-sortie** (9 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsera.fr/assets/annales/bts-era/E2 - Mathématiques/2022/BTS ERA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage

Un chariot de fête foraine, lancé à 20 m/s, est ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est modélisée par une fonction étudiée au moyen d'une équation différentielle, de limites, de variations, d'une intégrale et d'un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle indiqué.

Pour l'équation homogène $y' + 0,8y = 0$, on utilise la forme générale des solutions de $y' + ay = 0$: $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, $a = 0,8$. L'intervalle d'étude est $[0; +\infty[$, donc l'ensemble des solutions est obtenu en laissant k parcourir $\mathbb{R}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction constante g définie par g(t) = 5 est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

1. La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc $g'(t) = 0$.
2. En remplaçant g et sa dérivée dans le membre de gauche, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$.

Le membre de gauche vaut donc bien 4 pour tout t. La fonction donnée vérifie l'équation différentielle complète : c'est une solution particulière.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution particulière de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1.c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La solution générale de l'équation complète s'obtient en ajoutant à une solution particulière les solutions de l'équation homogène associée. Ici, $g(t) = 5$ est une solution particulière et les solutions homogènes sont $ke^{-0,8t}$. La constante réelle k étant arbitraire, cette expression donne toutes les solutions sur l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

1. La solution générale trouvée précédemment est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$.
2. À l'instant initial, $f(0) = 5 + k$, puisque $e^0 = 1$. La condition $f(0) = 20$ impose donc $5 + k = 20$, d'où $k = 15$.

En reportant cette constante dans la solution générale, on obtient la fonction vitesse recherchée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On part de l'expression $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. L'exponentielle $e^{-0,8t}$ tend alors vers zéro, tout comme son multiple $15e^{-0,8t}$. Il ne reste donc que le terme constant 5 dans la limite de $f(t)$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe représentative C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ est finie et égale à 5. Une fonction qui tend vers une valeur finie possède une asymptote horizontale d'ordonnée égale à cette limite. La courbe C se rapproche donc de la droite horizontale d'équation $y = 5$ lorsque t augmente indéfiniment.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À partir de l'expression fournie pour f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-12e^{-0,8t} < 0$	
Variation de f	20	$\searrow 5$

Comme l'exponentielle est strictement positive, $f'(t)$ est négative sur tout $[0; +\infty[$. La fonction est donc strictement décroissante. Elle part de $f(0) = 20$ et tend vers 5 à l'infini.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Le chariot s'arrêterait si sa vitesse devenait nulle. Or, pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, et ainsi $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse diminue, mais reste toujours positive. Elle se rapproche de $5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ sans atteindre zéro : le système ne permet donc pas au chariot de s'arrêter selon ce modèle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ sans s'annuler.

Question 4.a. **Vérifier que la fonction F donnée dans le sujet est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

1. On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$.
2. Par dérivation d'une composée, $\left(e^{-0,8t}\right)' = -0,8e^{-0,8t}$. Ainsi, $F'(t) = -18,75 \times (-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$.

Cette dérivée est exactement l'expression de $f(t)$, donc F est bien une primitive de f sur l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Question 4.b. **Calculer la distance parcourue par le chariot entre t = 0 et t = 1 à l'aide de l'intégrale de f. Donner la valeur exacte puis une valeur arrondie au centimètre.**

La distance parcourue entre 0 et 1 seconde vaut $d = \int_0^1 f(t)\,dt$. Comme F est une primitive de f, $d = F(1) - F(0)$. En utilisant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. L'arrondi au centimètre s'écrit au centième de mètre.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Choisir parmi les propositions le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le polynôme de Taylor affiché est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste doit s'écrire $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Parmi les propositions, il faut donc choisir celle qui reprend ce polynôme et ajoute un reste de cette forme.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. À partir de l'expression de f, on a $f(0) = 15 + 5 = 20$. La dérivée fournie donne $f'(0) = -12e^0 = -12$. En remplaçant ces deux valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient une droite de pente -12 passant par le point $(0; 20)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 12t$.

2. Étude par transformation de Laplace d'un système électrique entrée-sortie

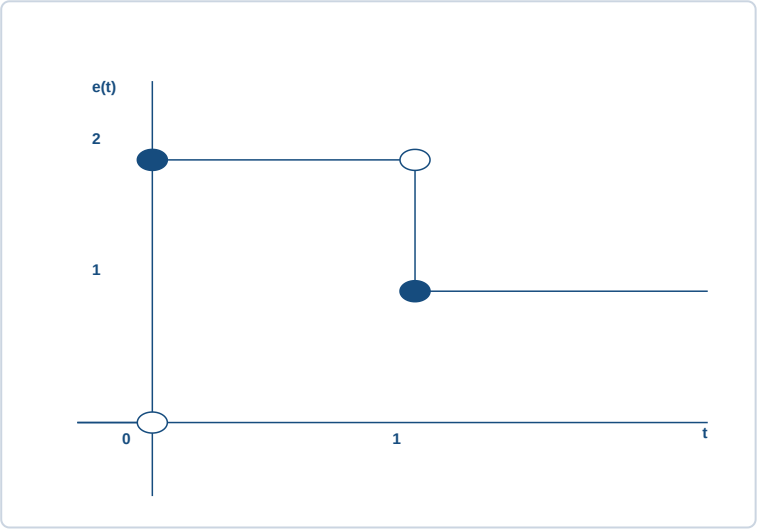
Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1), et sa fonction de transfert est H(p) = 1/(p + 1). L'exercice porte sur les transformées de Laplace des signaux, l'expression de la sortie et la représentation de son évolution.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction d'entrée e(t).

Comme le signal est causal, `e(t)=0` pour `t<0`. Pour `0≤t<1`, seul le premier échelon contribue, donc `e(t)=2`. À partir de `t=1`, les deux échelons valent 1 et `e(t)=1`. Les valeurs aux instants de saut sont incluses dans le palier qui commence, car `U(0)=1`.

Signal d’entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

Palier 0 pour t<0, palier 2 sur [0;1[, puis palier 1 sur [1;+∞[.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t).

Par linéarité, la transformée de `2U(t)` est `2/p`. Le formulaire donne pour l’échelon retardé `U(t-1)` la transformée `e^{-p}/p`. En soustrayant cette dernière de la première, on obtient la transformée du signal d’entrée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/(p(p + 1))]e⁻ᵖ.

La relation entrée-sortie est $S(p) = H(p)E(p)$. Avec $H(p) = \dfrac{1}{p+1}$ et $E(p) = \dfrac{2 - e^{-p}}{p}$, on multiplie les deux fractions. En séparant ensuite les termes du numérateur, on obtient l'expression demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S(p) = \dfrac{2}{p(p+1)} - \dfrac{e^{-p}}{p(p+1)}$.

Question 2. Vérifier l'égalité 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

On met au même dénominateur les deux fractions du membre de droite : $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1} = \dfrac{(p+1) - p}{p(p+1)}$. Le numérateur se réduit à 1. L'égalité est donc vérifiée pour les valeurs de p où les dénominateurs sont définis.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$.

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e⁻ᵖ/p et de e⁻ᵖ/(p + 1), en utilisant le formulaire fourni.

Les deux premières inversions viennent directement du formulaire. Pour les deux dernières, on applique la propriété de retard d'une unité : la fonction de départ est décalée d'une unité et multipliée par $U(t-1)$.

1. $\mathcal{L}^{-1}(1/p) = U(t)$.
2. $\mathcal{L}^{-1}(1/(p+1)) = e^{-t}U(t)$.
3. $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/p) = U(t-1)$.
4. $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/(p+1)) = e^{-(t-1)}U(t-1)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

En utilisant la décomposition précédente, $S(p) = 2\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}\right) - e^{-p}\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}\right)$. Sur $[0;1[$, les termes retardés sont nuls puisque $U(t-1) = 0$. L'inverse des termes restants donne l'expression de $s(t)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. En utilisant l'expression admise de s(t) sur [1 ; +∞[, calculer s(1) et donner la valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.

On remplace t par 1 dans l'expression admise pour $t \geq 1$: $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. Comme $e^{-1} = 1/e$, cela se simplifie en $2 - 2/e$. L'arrondi au dixième donne la valeur ci-dessous.

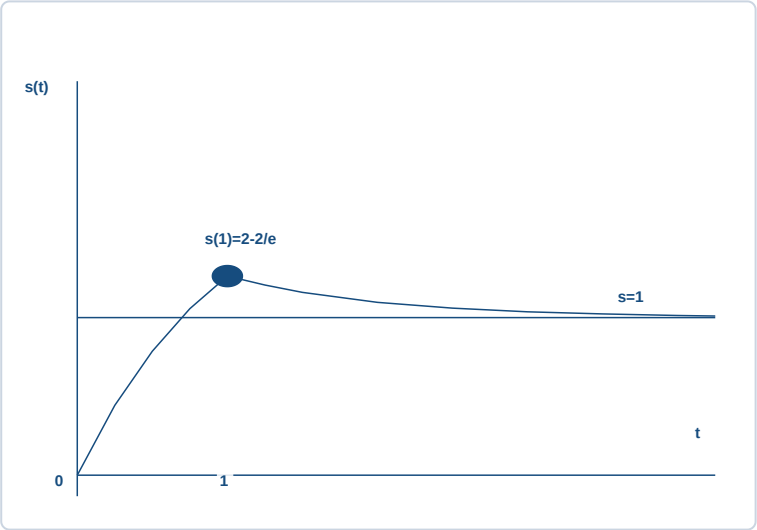
✓ RÉPONSE À RETENIR

$s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1,3.$

Question 5.b. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.

Sur $[0;1[$, la sortie suit $s(t) = 2(1 - e^{-t})$ et croît de 0 à $2 - 2/e$. Pour $t \geq 1$, elle suit $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$, décroît et tend vers 1. Les deux expressions donnent la même valeur en $t = 1$: le tracé se raccorde sans saut.

Courbe représentative du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe croît de $(0;0)$ à $(1;2-2/e)$, puis décroît vers l'asymptote $s = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, le terme exponentiel tend vers zéro. Il ne reste donc que le terme constant, qui donne la limite demandée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2022, code 22MATGRB2, dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les thèmes sont le freinage d'un chariot et un système électrique, avec équations différentielles, étude de fonction, intégrales, développements limités et transformations de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = b$, la solution générale est la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène.
- Si $f(t)$ tend vers L quand t tend vers $+\infty$, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation $y = L$.
- La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle correspondant.
- La transformée de Laplace de $f(t - a)U(t - a)$ est $F(p)e^{-ap}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : vitesse en m/s, temps en secondes et distance en mètres.
- Pour le tableau de variation, établir le signe de la dérivée sur tout l'intervalle étudié.
- Pour le développement limité, distinguer le terme d'ordre 2 du reste $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t)$ qui tend vers 0.
- Avec $U(t - 1)$, raisonner séparément avant et après $t = 1$.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution de l'équation différentielle du freinage ?

Résoudre d'abord l'équation homogène, puis ajouter une solution particulière constante. La condition initiale $f(0) = 20$ détermine la constante restante et permet d'obtenir la fonction de vitesse du chariot.

Q : Comment appliquer le décalage temporel dans la transformation de Laplace ?

La transformée de $f(t - a)U(t - a)$ est $F(p)e^{-ap}$. Il faut reconnaître la fonction de base f, repérer son retard a, puis appliquer la formule pour déterminer la transformée inverse du terme décalé.

Q : Combien de temps et de points sont prévus pour chaque exercice ?

L'épreuve dure 2 heures et comprend deux exercices valant chacun 10 points. Le sujet ne détaille pas les points attribués à chaque sous-question ; répartissez votre temps selon leur difficulté et gardez quelques minutes pour vérifier.

Q : Quelles unités et conventions faut-il surveiller dans ce sujet ?

Pour le chariot, la vitesse s'exprime en mètres par seconde, le temps en secondes et la distance en mètres. Les signaux électriques sont causaux, et l'échelon unité vaut 1 pour t supérieur ou égal à 0.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsera.fr/assets/annales/bts-era/E2 - Mathématiques/2022/BTS ERA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Étude et Réalisation d\ : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.