Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d’un chariot de fête foraine** (12 questions) — **Page 3**
2. **Contrôle de tubes fluorescents et estimation de conformité des rivets** (9 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsera.fr/assets/annales/bts-era/E2 - Mathématiques/2022/BTS ERA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d’un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse f(t) est étudiée en fonction du temps. Les trois parties portent sur une équation différentielle, l’étude de la fonction vitesse et son développement limité au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l’équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.

La formule fournie pour l’équation homogène $y' + ay = 0$ donne les solutions $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, $a = 0,8$. La variable t est définie sur $[0; +\infty[$, comme dans l’énoncé.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}, \quad k \in \mathbb{R}$

Question 1. b. Soit g la fonction définie par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l’équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$. En remplaçant y par g dans l’équation, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. L’égalité est vérifiée pour tout t de l’intervalle considéré.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $g(t) = 5$ est bien une solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1. c. Déduire des questions précédentes l’ensemble des solutions de l’équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Une solution de l’équation complète s’obtient en ajoutant une solution particulière, ici $g(t) = 5$, à toutes les solutions de l’équation homogène. On reprend donc la forme obtenue en 1.a et on ajoute 5. La constante k peut prendre toute valeur réelle.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5, \quad k \in \mathbb{R}$

Question 2. Déterminer la solution f de l’équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale est $f(t) = ke^{-0,8t} + 5$. À l’instant initial, $e^0 = 1$, donc la condition $f(0) = 20$ donne $k + 5 = 20$. Ainsi, $k = 15$, ce qui détermine la solution recherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Pour f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ vaut 5.

Quand t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers 0. Le terme $15e^{-0,8t}$ tend également vers 0. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, il reste alors la constante 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$

Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ est finie et égale à 5. Par définition, la courbe représentative C admet donc une asymptote horizontale à cette extrémité. Son ordonnée est la valeur de la limite.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = −12e$^{-0,8t}$, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Sur $[0; +\infty[$, l'exponentielle est positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ et f est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et la limite en $+\infty$ vaut 5.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$		$-$
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour tout $t \geq 0$, on a $e^{-0,8t} > 0$. Par conséquent, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse reste donc toujours positive et ne peut jamais atteindre zéro, même si elle se rapproche de 5 lorsque le temps augmente.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : le chariot ne s'arrête pas, sa vitesse reste supérieure à 5 m·s⁻¹.

Question 4. a. Pour F(t) = −18,75e^{−0,8t} + 5t, vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. La dérivée de l'exponentielle composée donne $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est précisément $f(t)$, donc F est une primitive de f.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4. b. En utilisant la formule intégrale fournie, calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre t = 0 et t = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La formule intégrale et la primitive donnent $d = F(1) - F(0)$. En substituant les bornes, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. L'évaluation donne environ $15,3251$ m, soit un arrondi au centimètre de $15,33$ m.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33$ m.

Partie C - Étude locale

Question 1. Question à choix multiples sans justification : parmi les expressions proposées, recopier l'unique développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni ne retire de point.

Le logiciel affiche la partie régulière $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. À l'ordre 2, le reste doit s'écrire sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Parmi les propositions de l'énoncé, seule la troisième respecte cette forme.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$: troisième proposition.

Question 2. Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. On lit dans l'énoncé que $f(0) = 20$, et la dérivée donnée fournit $f'(0) = -12e^0 = -12$. En remplaçant ces valeurs dans l'équation, on obtient la tangente demandée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$y = 20 - 12t$

2. Contrôle de tubes fluorescents et estimation de conformité des rivets

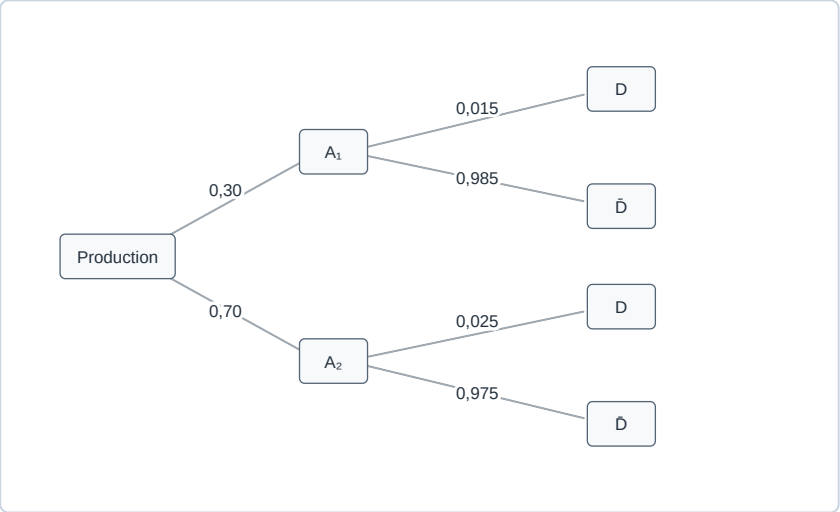
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers, et des tests de conformité permettent d'étudier la présence de défauts ainsi que la durée de fonctionnement des tubes. Une dernière partie porte sur l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon de 1 000 rivets.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. À partir des proportions de production et de défauts indiquées pour les deux ateliers, réaliser un arbre pondéré décrivant la situation.

L'arbre commence par le choix de l'atelier, avec les proportions de production. À partir de chaque atelier, les branches indiquent la probabilité conditionnelle d'un défaut et son complément, correspondant à l'absence de défaut. Les probabilités des deux branches issues d'un même atelier totalisent 1. Le schéma reprend les données de l'énoncé.

Production des tubes et défauts



D : tube présentant un défaut ; D̄ : tube sans défaut.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Arbre pondéré : voir le schéma.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

Pour obtenir la probabilité que le tube provienne de l'atelier 1 et présente un défaut, on multiplie la probabilité de choisir cet atelier par la probabilité conditionnelle d'un défaut dans cet atelier. L'atelier 1 produit 30 % des tubes et 1,5 % de ceux-ci présentent un défaut : $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D \mid A_1) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$, soit $0{,}45\,\%$.

Question 3. **Déterminer la probabilité qu'un tube prélevé au hasard dans la production totale présente un défaut, à partir des données des deux ateliers.**

Un tube défectueux provient nécessairement de l'un des deux ateliers. Les événements correspondants étant incompatibles, on additionne leurs probabilités : $P(D) = P(A_1 \cap D) + P(A_2 \cap D)$. Ainsi, $P(D) = 0{,}30 \times 0{,}015 + 0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}0045 + 0{,}0175 = 0{,}022$. Cette probabilité concerne un tube prélevé dans la production totale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0{,}022$, soit $2{,}2\,\%$.

Question 4. **Sachant que le tube ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

Événement	Probabilité
Atelier 2 et sans défaut	$0{,}70 \times 0{,}975 = 0{,}6825$
Sans défaut	$1 - 0{,}022 = 0{,}978$

On divise la probabilité d'être issu de l'atelier 2 et sans défaut par celle d'être sans défaut : $P(A_2 \mid \overline{D}) = 0{,}6825 / 0{,}978 \approx 0{,}6979$. C'est la probabilité recherchée sachant que le tube est sans défaut.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0{,}698$, soit $69{,}8\,\%$.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance est $E(T) = 1/\lambda$. Ici, le sujet donne $\lambda = 0{,}001$ par heure. Donc $E(T) = 1/0{,}001 = 1\,000$ heures. Dans ce modèle, la durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube fluorescent est de 1 000 heures.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. **Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

1. La formule de la loi exponentielle est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

2. Avec $\lambda = 0{,}001$ et $t = 8\,000$, $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0{,}001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0{,}9996645$. Comme la loi est continue, utiliser $<$ ou $\leq$ donne la même probabilité.
3. Arrondi au centième : $1{,}00$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T < 8\,000) \approx 1{,}00$.

Question 3. **Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent prélevé soit supérieure à 10 000 heures.**

La probabilité que la durée dépasse t est la probabilité complémentaire de celle de ne pas dépasser t : $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Pour $t = 10\,000$ heures et $\lambda = 0{,}001$, on obtient $P(T > 10\,000) = e^{-0{,}001 \times 10\,000} = e^{-10} \approx 0{,}0000454$. Arrondie au centième, cette probabilité est $0{,}00$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 10\,000) \approx 0{,}00$ au centième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **Sur un échantillon de 1 000 rivets dont 975 sont conformes, donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.**

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon. Il y a 975 rivets conformes sur 1 000 prélevés, donc $\hat{p} = 975/1\,000 = 0{,}975$. Cette valeur estime la proportion de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\hat{p} = 0{,}975$, soit $97{,}5\,\%$.

Question 2. **À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance de niveau 95 % centré sur la fréquence observée des rivets conformes. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.**

La fréquence observée est $f = 0{,}975$ et l'effectif est $n = 1\,000$. La marge de l'intervalle donné vaut $1{,}96\sqrt{0{,}975(1-0{,}975)/1\,000} \approx 0{,}0096773$. On obtient donc $[0{,}975 - 0{,}0096773\ ;\ 0{,}975 + 0{,}0096773]$. En arrondissant chaque borne au millième, l'intervalle demandé est $[0{,}965\ ;\ 0{,}985]$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965\ ;\ 0{,}985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, groupe B, session 2022, code 22MATGRB1, dure deux heures. Le coefficient est 2, sauf pour Traitement des matériaux, coefficient 3. Elle étudie le freinage d'un chariot et le contrôle de tubes fluorescents et de rivets. Les compétences évaluées couvrent équations différentielles, fonctions, développements limités, probabilités, loi exponentielle et estimation par intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = b$, la solution générale est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.
- Si $f(t)$ tend vers une limite finie L en $+\infty$, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation $y = L$.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = 1/\lambda$ et $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- L'intervalle de confiance fourni pour une proportion est centré sur f et utilise la marge $1{,}96\sqrt{f(1-f)/n}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Dans l'arbre pondéré, distinguer les proportions des ateliers des probabilités conditionnelles de défaut.
- Pour une probabilité conditionnelle, identifier clairement l'événement conditionnant et le placer au dénominateur.
- Pour la distance, intégrer la vitesse entre les bornes demandées et utiliser une primitive adaptée.
- Respecter les précisions demandées : centimètre, 10^{-2} ou 10^{-3} selon la question.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle de la partie A ?

Résolvez d'abord l'équation homogène $y' + 0{,}8y = 0$, puis ajoutez une solution particulière de l'équation complète. La condition initiale $f(0) = 20$ permet ensuite de déterminer la constante de la solution.

Q : Comment déterminer si le chariot s'arrête selon le modèle ?

Étudiez la vitesse $f(t)$ pour $t \geq 0$ et sa limite quand t tend vers $+\infty$. Le modèle décrit un arrêt à un instant fini seulement si la vitesse atteint zéro à cet instant, et non simplement si elle tend vers une limite.

Q : Comment s'organiser entre les parties et gérer les arrondis ?

Les trois parties de chaque exercice peuvent être traitées indépendamment. Utilisez les formules fournies, conservez les valeurs exactes pendant les calculs et n'arrondissez qu'à la précision explicitement demandée.

Q : Quel est le barème des exercices et quelles précisions d'arrondi faut-il respecter ?

Le sujet attribue 10 points à chacun des deux exercices. Les consignes demandent des arrondis au centimètre pour une distance, à 10^{-2} pour les probabilités de durée de vie et à 10^{-3} pour les bornes de l'intervalle.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsera.fr/assets/annales/bts-era/E2 - Mathématiques/2022/BTS ERA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Étude et Réalisation d\ : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.