



Ce document a été mis en ligne par l'organisme [FormaV](#)®

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :

[www.formav.co/explorer](http://www.formav.co/explorer)

### **EXERCICE 1** (12 points)

**A** - Soit (E) l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 2y = -xe^{-3x}$$

où  $y$  est une fonction de la variable  $x$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

1. Résoudre l'équation différentielle (E<sub>0</sub>) :

$$(E_0) : y' + 2y = 0$$

2. a) Montrer que la fonction  $h$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = (x+1)e^{-3x}$$

est une solution particulière de (E).

b) En déduire la solution générale de (E).

c) Déterminer la solution de (E) qui prend la valeur 0 en  $x = -1$ .

**B** - On considère la fonction  $f$  définie sur  $[-1, 1]$  par  $f(x) = (x+1)e^{-3x}$ . On note C sa représentation graphique dans un repère orthonormal (unité graphique : 3 cm).

1. Étudier les variations de  $f$  sur  $[-1, 1]$ .

2. Tracer la courbe C.

3. Montrer que la fonction  $F(x) = -\frac{1}{9}(3x+4)e^{-3x}$  est une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle donné.

4. Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire du domaine D limité par la courbe C, l'axe  $x'Ox$  et les droites d'équation  $x = -1$  et  $x = 0$ .

**C** - Une entreprise décide de réaliser un vase pour un jardin en utilisant la forme obtenue en faisant tourner le domaine D autour de l'axe  $x'Ox$ . Cette forme sera une représentation à l'échelle 1 : 10 du vase. On rappelle que le volume du solide de révolution engendré par la rotation du domaine est en unités de volumes :  $V = \pi \int_{-1}^0 [f(x)]^2 dx$ .

1. On considère la fonction  $f^2$  qui à  $x$  associe  $[f(x)]^2$ . Vérifier que la fonction  $g$  définie sur  $[-1, 1]$  par  $g(x) = \left(-\frac{1}{6}x^2 - \frac{7}{18}x - \frac{25}{108}\right)e^{-6x}$  est une primitive de  $f^2$ .

2. Calculer le volume du vase en  $\text{m}^3$  à  $10^{-3}$  près.

## **EXERCICE 2** (8 points)

Une entreprise fabrique des pieds métalliques pour des tables. Dans la production d'une journée, on étudie un échantillon de 120 pieds dont on mesure les longueurs. On obtient la série suivante :

Longueur en mm	699,4	699,6	699,8	700,0	700,2	700,4	700,6
Effectif	3	18	12	46	20	19	2

1. Calculer au 1/10 de millimètre près la moyenne puis l'écart type de cette série.

On note  $X$  la variable aléatoire qui, à un pied de table pris au hasard dans la production, associe sa longueur et on admet que  $X$  suit une loi normale de moyenne  $m = 700$  et d'écart type  $\sigma = 0,25$ . Un pied est estimé conforme si sa longueur appartient à l'intervalle  $[699,6 ; 700,4]$ .

2. Calculer, à  $10^{-2}$  près, la probabilité  $P(699,6 \leq X \leq 700,4)$ .

3. En déduire la probabilité qu'un pied, pris au hasard dans la production, ne soit pas conforme.

Ces pieds sont conditionnés par lot de 4. On considère que le nombre de pieds produits est suffisamment important pour permettre d'assimiler un lot à un tirage de 4 pieds choisis au hasard et avec remise.

*On admet désormais que la probabilité qu'un pied, pris au hasard dans la production, ne soit pas conforme est 0,10.*

On désigne par  $Y$  la variable aléatoire qui, à chaque lot de 4 pieds, associe le nombre de pieds non conformes.

4. Justifier le fait que la variable  $Y$  suit une loi binomiale et en donner les paramètres.

5. Calculer, à  $10^{-2}$  près, les probabilités  $P(Y = 0)$  et  $P(Y \leq 1)$ .

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR  
AGENCEMENT DE L'ENVIRONNEMENT ARCHITECTURAL

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

**1. RELATIONS FONCTIONNELLES**

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a + b) = \exp a \times \exp b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$$

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

**2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL**

**a) Limites usuelles**

Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 ;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0 ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0.$$

**b) Dérivées et primitives**

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\sin t$	$\cos t$
$e^t$	$e^t$	$\cos t$	$-\sin t$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}^+)$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$

Opérations

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = k u'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \text{ } u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

**c) Calcul intégral**

Valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$  :  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$

**d) Equations différentielles**

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où $G$ est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$x'' + \omega^2 x = 0$	$x(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$

### 3. PROBABILITES

a) Loi binomiale  $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$  où  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  ;  $E(X) = np$  ;  $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

$k \backslash \lambda$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

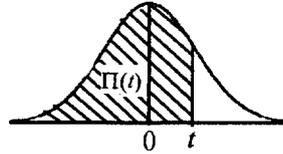
$k \backslash \lambda$	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0.000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0.000	0.001
22											0.000

c) **Loi normale**

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité :  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE  $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota :  $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$