Exercice 1. (10 points)

Une entreprise fabrique des fermes industrielles. Elle désire étudier le phénomène de fluage (déformation en fonction du temps sous charge constante) du bois utilisé pour les poutres. Pour cela, elle utilise le modèle de Kelvin-Voigt :
Si l'on note ε la fonction définie sur $[0, +\infty[$ représentant la déformation sous charge constante en fonction du temps t, alors :

ε est la solution de l'équation différentielle: $\frac{\eta}{E}y' + y = \frac{\sigma}{E}$ vérifiant la condition initiale $\varepsilon(0)=0$,

où σ représente la contrainte ; η et E sont des constantes dépendant du matériau utilisé.
On suppose que le bois utilisé a pour caractéristiques : $\eta = 4 \times 10^9$ Mpa.s et E = 5000 Mpa, et que la contrainte imposée dans le test est : $\sigma = 20$ Mpa, (Mpa : megapascal). Le temps t est exprimé en secondes.
L'équation différentielle permettant de déterminer ε est donc :

$$8.10^5 y' + y = 0{,}004 \qquad (1).$$

Partie I.

1) Résoudre l'équation différentielle : $8.10^5 y' + y = 0$ où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et où y' est la fonction dérivée de y.

2) Déterminer une fonction constante g, solution particulière de l'équation (1).
3) En déduire la solution générale de l'équation différentielle (1).
4) Déterminer ε.

Partie II.

On admet que pour tout t dans $[0, +\infty[$: $\varepsilon(t) = 0{,}004(1 - e^{-1{,}25\times10^{-6}t})$.

1) Montrer que la fonction dérivée ε' de ε sur $[0, +\infty[$ est définie par $\varepsilon'(t) = 5 \times 10^{-9}\ e^{-1{,}25\times10^{-6}t}$, puis en déduire le sens de variation de ε sur son ensemble de définition.

2) Tracer la courbe représentative de ε dans le repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$
(Unités graphiques : 1cm représente 5×10^5 s sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 0,0005 sur l'axe des ordonnées.)

3) On admet que la déformation maximale est de 0,004.
À partir de quelle valeur de t la déformation atteint-elle 95% de sa déformation maximale ?
Arrondir le résultat à 1 près.
Exprimer ce temps en jours (arrondir à 1 jour près).

Exercice 2. (10 points)

Certaines poutres nécessaires à la réalisation des fermes ont une section rectangulaire de largeur 180 mm et de longueur 200 mm. La tolérance est de ± 1 mm, c'est-à-dire que l'on considère comme largeur acceptable toute valeur de l'intervalle $[179,181]$ et comme longueur acceptable toute valeur de l'intervalle $[199,201]$.

Partie I.

On réalise une étude de la largeur et de la longueur de la section des poutres d'un échantillon de 100 poutres prises au hasard dans la production.
Le tableau suivant indique dans chaque case le nombre de poutres correspondant aux intervalles indiqués.

		Largeurs mesurées (en mm)							
		[178 ; 178,5[	[178,5 ; 179[	[179 ; 179,5[	[179,5 ; 180[	[180 ; 180,5[	[180,5 ; 181[	[181 ; 181,5[	[181,5 ; 182[
Longueurs mesurées (en mm)	[198 ; 198,5[						1		
	[198,5 ; 199[			1	1	2	1		
	[199 ; 199,5[	1	1	4	4	6	2		1
	[199,5 ; 200[			7	11	9	7		
	[200 ; 200,5[		1	5	9	6	7		1
	[200,5 ; 201[			1	2	2	1		
	[201 ; 201,5[		1		1	1	1		
	[201,5 ; 202[			1		1			

On considère une poutre prise au hasard dans l'échantillon.
1) On note l l'événement : « la poutre a une section de largeur acceptable ».
Calculer P(l).
2) On note E l'événement : « la poutre a une section de largeur et de longueur acceptables » .
Montrer que $\frac{83}{100} \leq P(E) \leq \frac{86}{100}$.

Partie II.

On admet que la probabilité qu'une poutre, prise au hasard dans la production, soit conforme, est 0,9.
La construction d'une ferme nécessite 15 poutres de ce type.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 15 poutres, associe le nombre de poutres conformes.
La production est suffisamment importante pour que l'on assimile cette expérience à une succession de 15 tirages avec remise.
1) Quelle est la loi suivie par X ? Préciser les paramètres de cette loi.
2) a) Calculer la probabilité que, dans un lot de 15 poutres choisies au hasard, toutes les poutres soient conformes. Donner une valeur arrondie à 10^{-3} près.
b) Calculer la probabilité que, dans un lot de 15 poutres choisies au hasard, il y ait au plus une poutre non conforme. Donner une valeur arrondie à 10^{-3} près.

Partie III.

Une commande nécessite 1500 poutres. On veut évaluer la probabilité que le nombre de poutres non conformes soit d'au plus 160.

On note X′ la variable aléatoire qui, à chaque lot de 1500 poutres, associe le nombre de poutres conformes.

On admet que X′ suit la loi binomiale B(1500 ; 0,9).

1) En quoi le calcul de $P(X' > 1340)$ est-il « difficile » ?

2) a) Pour ce calcul, on décide d'approcher la loi de X′ par une loi normale.
Préciser les paramètres de cette loi.

On notera Y la variable aléatoire qui suit cette loi.

b) Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(Y > 1340)$.

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

AGENCEMENT DE L'ENVIRONNEMENT ARCHITECTURAL

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2\sin t \cos t$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

b) **Dérivées et primitives**

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\sin t$	$\cos t$
e^t	e^t	$\cos t$	$-\sin t$
t^α $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) **Calcul intégral**

Valeur moyenne de f sur $[a\ ,\ b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\, dt$

d) **Equations différentielles**

Equations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$x'' + \omega^2 x = 0$	$x(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$

3. PROBABILITES

a) Loi binomiale $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

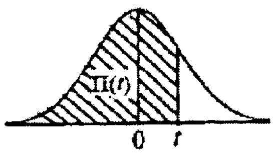
k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0.000	0.001
22											0.000

c) <u>Loi normale</u>

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t)=P(T\leq t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$